SISTEM LINIER

6. DERET FOUREIER

TUJUAN PERKULIAHAN
DERET FOUREIER

- Mahasiswa mampu menyatakan sembarang sinyal periodik waktu malar sebagai gabungan linear atas fungsi dasar.
- Mahasiswa mampu menerapkan prinsip superposisi yang diperluas pada analisis sistem LTI menggunakan fungsi eigen.

Sejarah Analisis Fourier

- Silahkan pelajari dan cermati perjalanan hidup Jean Baptiste Joseph Fourier dalam usahanya untuk menyakinkan kalangan ilmuwan tentang idenya untuk menggunakan fungsi trigonometri sebagai fungsi dasar.

Manfaat Fungsi Dasar

- Sekumpulan sinyal dasar dapat digunakan untuk membuat kelassinyal yang luas dan bermanfaat
- Tanggapan sistem LTI untuk setiap sinyal seharusnya cukup sederhana dalam struktur sehingga kita dapat menyatakan dengan baik tanggapan sistem terhadap sinyal yang dibuat sebagai gabungan linear atas sinyal dasar.

Eksponensial Kompleks

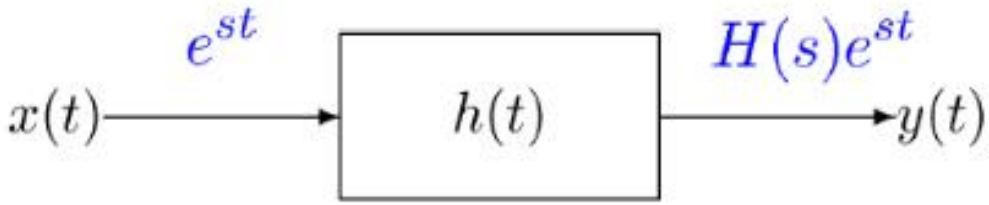
$$\phi_k(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow \underbrace{\lambda_k}_{\text{eigenvalue}} \underbrace{\phi_k(t)}_{\text{eigenfunction}}$$

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st}$$

$$= \underbrace{H(s)}_{\text{eigenvalue}} \underbrace{e^{st}}_{\text{eigenfunction}}$$

Analisis diperluas



$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum_k H(s_k)a_k e^{s_k t}$$

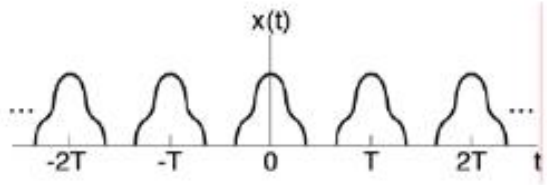
Batasan

- Sembarang sinyal dapat dinyatakan sebagai gabungan linear atas fungsi eksponensial kompleks yang dibatasi untuk peubah s yang murni imajiner yaitu $s = j\omega$.
- Sehingga fungsi eigen yang akan digunakan adalah dalam bentuk $e^{j\omega t}$ yang bermagnitude 1.

Sinyal Periodik Malar dinyatakan sebagai deret Fourier

$x(t) = x(t+T) \quad \text{for all } t$

- smallest such T is the *fundamental period*
- $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$ is the *fundamental frequency*



$e^{j\omega t}$ periodic with period $T \Leftrightarrow \omega = k\omega_0$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi t/T}$$

- periodic with period T
- $\{a_k\}$ are the *Fourier (series) coefficients*
- $k = 0$ DC
- $k = \pm 1$ first harmonic
- $k = \pm 2$ second harmonic

Mencari Koefisien Deret Fourier

First, for simple periodic signals consisting of a few sinusoidal terms

$$\text{Ex: } x(t) = \cos 4\pi t + 2\sin 8\pi t$$

Euler's relation (memorize!)

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right] + \frac{2}{2j}\left[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t}\right]$$

$$\omega_0 = 4\pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 - \text{no dc component} \\
a_1 &= \frac{1}{2} \\
a_{-1} &= \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{1}{j} \\
a_{-2} &= -\frac{1}{j} \\
a_3 &= 0 \\
a_{-3} &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bentuk Deret Fourier

- Untuk sinyal periodik riil, ada dua cara merumuskan deret Fourier, yaitu:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t]$$

or

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\gamma_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)]$$

Langkah untuk mendapatkan koefisien deret Fourier

- Untuk sembarang sinyal x(t), untuk mencari koefisien a_k pembentuknya adalah dengan cara:
  - Kalikan x(t) dengan $e^{-j\omega_0 t}$
  - Integralkan dalam satu periode

$$\begin{aligned}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt &= \int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right) e^{-jn\omega_0 t}dt \\ &= \sum^{\infty} a_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right)\end{aligned}$$

Lanjutan

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

$$= T\delta[k-n] \quad \text{Orthogonality}$$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot T\delta[k-n]$$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n T$$

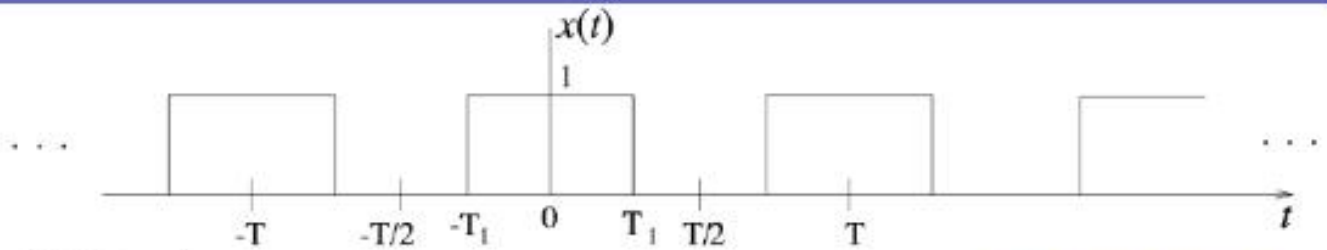
Pasangan Deret Fourier

CT Fourier Series Pair $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{(Synthesis equation)}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \text{(Analysis equation)}$$

Contoh



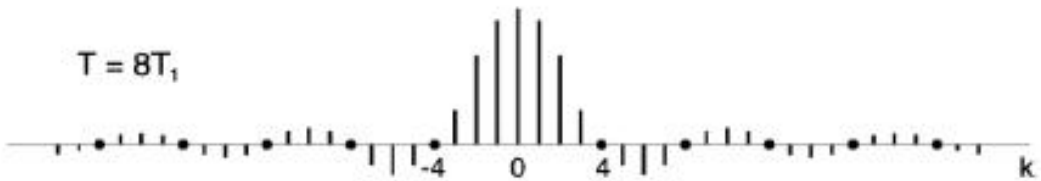
For $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{2T_1}{T}$$

DC component is just the average

For $k \neq 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= -\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right) \end{aligned}$$



Syarat Dirichlet

Condition 1. $x(t)$ is *absolutely integrable* over one period, i. e.

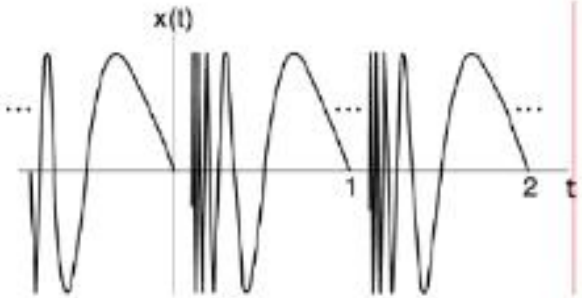
$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

And

Condition 2. In a finite time interval, $x(t)$ has a *finite* number of maxima and minima.

Ex. An example that violates Condition 2.

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) \quad 0 < t \leq 1$$



And

Condition 3. In a finite time interval, $x(t)$ has only a *finite* number of discontinuities.

Ex. An example that violates Condition 3.